EXAMEN FINAL DE CÁLCULO (4/7/2012)
SOLUCIONES

1. *Calcule los siguientes límites:*

1. *(0,5 puntos)* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+5^n}{8^n}$

2. *(1 punto)* $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^5}{n^6+1} + \dfrac{3n^5}{n^6+2} + \cdots + \dfrac{3n^5}{n^6+n} \right)$

Solución

1. Sea $a_n = \dfrac{3^n+5^n}{8^n}$. Se consideran las sucesiones de término general

$$b_n = \frac{3^n}{8^n} = \left(\frac{3}{8}\right)^n \qquad \text{y} \qquad c_n = \frac{5^n}{8^n} = \left(\frac{5}{8}\right)^n.$$

Puesto que $-1 < \frac{3}{8} < 1$ y $-1 < \frac{5}{8} < 1$, se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 0$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (b_n + c_n) = \lim_{n\to\infty} b_n + \lim_{n\to\infty} c_n = 0.$$

2. Sea $b_n = \dfrac{3n^5}{n^6+1} + \dfrac{3n^5}{n^6+2} + \cdots + \dfrac{3n^5}{n^6+n}$ el término general de la sucesión dada.

Se consideran las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$ dadas por

$$a_n = n \cdot \frac{3n^5}{n^6+n} = \frac{3n^6}{n^6+n} \qquad \text{y} \qquad c_n = n \cdot \frac{3n^5}{n^6+1} = \frac{3n^6}{n^6+1},$$

que verifican $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, siendo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 3$.

Aplicando la regla del sandwich para sucesiones, se tiene que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$.

2. *Resuelva los siguientes apartados sobre series:*

1. *(0.5 puntos) Estudie la convergencia de la serie* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n+3)!}$.

2. *(1 punto) Calcule el centro y radio de convergencia de la serie de potencias*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{5^n} (x+1)^n$$

y sume la serie para $x = 0$.

Solución

1. Sea $a_n = \dfrac{1}{(n+3)!}$.

   La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente pues $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+3)!}{(n+4)!} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+4} = 0 < 1.$

2. Sea $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, donde $a_n = (-1)^n \dfrac{2^n}{5^n}$ y $x_0 = -1$.

   Se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2^n}{5^n}} = \dfrac{2}{5}$.

   Por tanto, el radio de convergencia de la serie de potencias es $r = \frac{5}{2}$.

   Para $x = 0$ se obtiene $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{2^n}{5^n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\dfrac{2}{5}\right)^n$. Esta serie numérica es convergente porque es una serie geométrica de razón $r = -\dfrac{2}{5}$, con $|r| < 1$. Su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{5^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{5}{7}.$$

3. *Dada la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \dfrac{2x^2}{x^2+(y+2)^2} & si\ (x,y) \neq (0,-2) \\ 2 & si\ (x,y) = (0,-2) \end{cases}$$

1. (1 puntos) Estudie si existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,-2)} f(x,y)$.

2. (0,8 puntos) Calcule, si existe, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-2)$.

Solución

1. Para estudiar el límite, veamos qué sucede con los límites iterados:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to -2}\left(x + \frac{2x^2}{x^2+(y+2)^2}\right)\right) = \lim_{x\to 0}\left(x + \frac{2x^2}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}(x+2) = 2$$

$$\lim_{y\to -2}\left(\lim_{x\to 0}\left(x + \frac{2x^2}{x^2+(y+2)^2}\right)\right) = \lim_{y\to -2} \frac{0}{(y+2)^2} = \lim_{y\to -2} 0 = 0$$

Como ambos límites iterados existen pero no coinciden, podemos concluir que no existe el límite doble.

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-2) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,-2)-f(0,-2)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\left(x + \dfrac{2x^2}{x^2}\right) - 2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+2-2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1.$

4. (*1,2 puntos*) *Dada la función* $f(x,y) = x^2 - 3y^3 + 2xy - 1$, *razone que existe plano tangente a su gráfica en el punto* $(2,1,4)$ *y halle su ecuación.*

Solución

Puesto que f es un polinomio, entonces es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}^2$, en particular en $(2,1)$. Por tanto, existe plano tangente a la gráfica de f en $(2,1,f(2,1)) = (2,1,4)$. Además, dicho plano tiene como ecuación:

$$z - f(2,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)\,(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)\,(y-1).$$

Dado que

$$\begin{array}{lcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+2y & \Longrightarrow & \dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 6 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -9y^2+2x & \Longrightarrow & \dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = -5 \end{array}$$

entonces la ecuación del plano tangente pedido es

$$z - 4 = 6(x-2) - 5(y-1)$$

y operando se obtiene

$$\boxed{z = 6x - 5y - 3}$$

5. *(2 puntos) Halle los extremos absolutos de la función* $f(x,y) = (x+1)^2 - y^2$ *en el conjunto* $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 + 2x - 3 = 0\}$.

Solución

Dado que $x^2+y^2+2x-3 = (x+1)^2+y^2-4$, el conjunto $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2+y^2 = 4\}$ es la circunferencia de centro $(-1,0)$ y de radio 2 y, por lo tanto, es cerrado y acotado. Además, la función f es continua, entonces se puede asegurar que existen el máximo y el mínimo absolutos de f en Γ. Buscamos los posibles extremos mediante el método de los multiplicadores de Lagrange entre:

• *Puntos no regulares de* Γ, que son los puntos de Γ que anulan las derivadas parciales de $g(x,y) = (x+1)^2 + y^2 - 4$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 2(x+1) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = 2y = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = -1 \\ y = 0 \end{array} \right.$$

y, dado que $(-1,0) \notin \Gamma$, no existen candidatos a extremos de este tipo.

• *Puntos estacionarios de la función de Lagrange*

$$F(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y) = (x+1)^2 - y^2 - \lambda((x+1)^2+y^2-4) = (1-\lambda)(x+1)^2 - (1+\lambda)y^2 - 4\lambda$$

pertenecientes a Γ; es decir, los puntos (x,y) que satisfacen el sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = 2(1-\lambda)(x+1) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -2(1+\lambda)y = 0 \\ (x+1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Si $\boxed{x=-1}$ entonces, de la tercera ecuación, $y=2$ ó $y=-2$, y así $(-1,2)$ y $(-1,-2)$ son candidatos a extremos.

Si $\boxed{x \neq -1}$ entonces $\lambda = 1$ y, de la segunda ecuación resulta $y=0$. La tercera ecuación se reduce a $(x+1)^2 = 4$, cuyas soluciones son $x=1$ ó $x=-3$, que permiten obtener los candidatos $(1,0)$ y $(-3,0)$.

Finalmente, evaluamos la función f en los posibles extremos:

$$f(-1,2) = -4, \quad f(-1,-2) = -4, \quad f(1,0) = 4, \quad f(-3,0) = 4,$$

concluyendo que f alcanza su valor *mínimo absoluto* en Γ, -4, en los puntos $\boxed{(-1,2) \text{ y } (-1,-2)}$ y su valor *máximo absoluto* en Γ, 4, en los puntos $\boxed{(1,0) \text{ y } (-3,0)}$.

6. *Calcule las siguientes integrales*

1. *(0.5 puntos)* $\displaystyle\int \frac{2x+3}{4+x^2}dx.$
2. *(1.5 puntos)* $\displaystyle\iint_R x^2 y \cos(x^3)\operatorname{sen}(y^2)\,dxdy$ *donde* $R = [0,1]\times[1,2]$.

Solución

1. La integral indefinida es inmediata:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{4+x^2}dx &= \int \frac{2x}{4+x^2}\,dx + \int \frac{3}{4+x^2}\,dx \\ &= \ln(4+x^2) + \frac{3}{2}\int \frac{1/2}{1+(x/2)^2}dx \\ &= \ln(4+x^2) + \frac{3}{2}\arctan(x/2) + C \end{aligned}$$

2. Respecto a la integral doble, se verifica:

$$\begin{aligned} \iint_R x^2 y \cos(x^3)\operatorname{sen}(y^2)\,dxdy &= \int_0^1 \left(\int_1^2 x^2 y \cos(x^3)\operatorname{sen}(y^2)\,dy \right) dx \\ &= \left(\int_0^1 x^2\cos(x^3)dx \right) \left(\int_1^2 y\operatorname{sen}(y^2)\,dy \right) \\ &= \left(\left[\frac{1}{3}\operatorname{sen}(x^3) \right]_{x=0}^{x=1} \right) \left(\left[-\frac{1}{2}\cos(y^2) \right]_{y=1}^{y=2} \right) \\ &= \frac{1}{6}\operatorname{sen}1\,(\cos 1 - \cos 4) \end{aligned}$$